

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ
МУФТ БЕСШПОНОЧНЫХ СОЕДИНЕНИЙ С
ПРИМЕНЕНИЕМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СХЕМ
ДЛЯ ЭЦВМ

Б.А. Ободовский, Р.Е.Урбанский

Муфты бесшпоночных соединений, предназначенных для передачи скручивающих моментов, в основном, работают на кручение. В связи с этим определение напряжений при кручении в поперечном сечении муфты представляет важную практическую задачу. При некоторых, самых общих предположениях муфту можно считать однородным изотропным брусом (валом) двусвязного поперечного сечения, работающим на кручение. Наружным контуром сечения муфты обычно является окружность; внутренний контур сечения совпадает с контуром, охватывающим поперечное сечение сопрягаемого с муфтой вала.

Решение задачи кручения бруса с двусвязным поперечным сечением сложной конфигурации может быть получено лишь методами теории упругости. Из них наиболее эффективным (для получения конкретных числовых результатов) является метод комплексного переменного и

конформных преобразований, разработанный Н.И.Мусхелишвили [1]. Однако применение этого метода требует наличия рациональной функции $Z = \omega(\zeta)$, конформно отображающей круговое кольцо на область, занимаемую поперечным сечением бруса. Даже при приближенном решении отыскание такой функции представляет собой сложную и далеко не всегда разрешимую математическую задачу, особенно в тех случаях, когда границы контуров близко подходят друг к другу. Во избежание трудностей, связанных с отысканием функций, конформно отображающих круговое кольцо на двусвязную область, а также учитывая, что расчету муфты на кручение всегда сопутствует расчет на кручение соответствующего ей вала, представляется целесообразным для решения задачи кручения муфты воспользоваться методом Д.И. Шермана [2]. Этим методом решение задачи кручения муфты можно довести до числового результата, используя ту же отображающую функцию, которая применяется при решении задачи кручения вала. Некоторая сложность, по сравнению с методом Н.И. Мусхелишвили, связанная с решением системы алгебраических уравнений полностью компенсируется теми выгодами, которые мы получаем, избегая необходимости определения дополнительной, конформно отображающей функции.

Сущность применяемого метода заключается в следующем: на внешнем контуре, которым является окружность, вводится чисто мнимая вспомогательная функция $q(t)$. С помощью этой функции осуществляется переход от искомой комплексной функции кручения, регулярной в рассматриваемой двусвязной области, к новой функции, регулярной уже в односвязной области. Последняя определяется в результате решения краевой задачи, путем использования конформного отображения внешности единичного круга на внешность контура, ограничивающего сечение бруса изнутри. Для определения функции $q(t)$ строится интегральное уравнение Фредгольма II рода. Способ решения этого уравнения заключается в приведении его к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений специфического типа относительно коэффициентов α_k разложения $q(t)$ в комплексный ряд Фурье. Урезая эту систему, в зависимости от требуемой точности решения, получаем приближенное решение задачи.

На основании полученного авторами решения построена вычислительная схема для ЭВМ, позволяющая путем простейших алгебраических операций вычислять жесткость при кручении и напряжения в характерных точках поперечного сечения муфты. Исходными данными для вычислений являются коэффициенты отображающего полинома

$$z = \sum_{n=1}^{S+1} c_n \frac{1}{z^{2n-3}}$$

(осуществляющего приближенное конформное отображение внешности единичного круга на бесконечную односвязную область, ограниченную внутренним контуром сечения муфты) и радиус R окружности, являющейся внешней границей поперечного сечения муфты. В схеме предусмотрено переменное число N уравнений алгебраической системы, что позволяет получать любую, наперед заданную, точность решения, и переменное число $S + 1$ членов отображающего полинома, что дает возможность добиться требуемой точности конформного отображения. Схема пригодна для решения задачи кручения бруса рассматриваемого поперечного сечения, обладающего двумя осями симметрии. Элементы напряженного состояния вычисляются в безразмерных величинах.

Для удобства пользования вычисления проводятся в 5 этапов:

1. Построение и решение алгебраической системы уравнений.
2. Вычисление жесткости при кручении.
3. Вычисление напряжений на внутреннем контуре сечения.

4. Вычисление напряжений на внешнем контуре сечения.

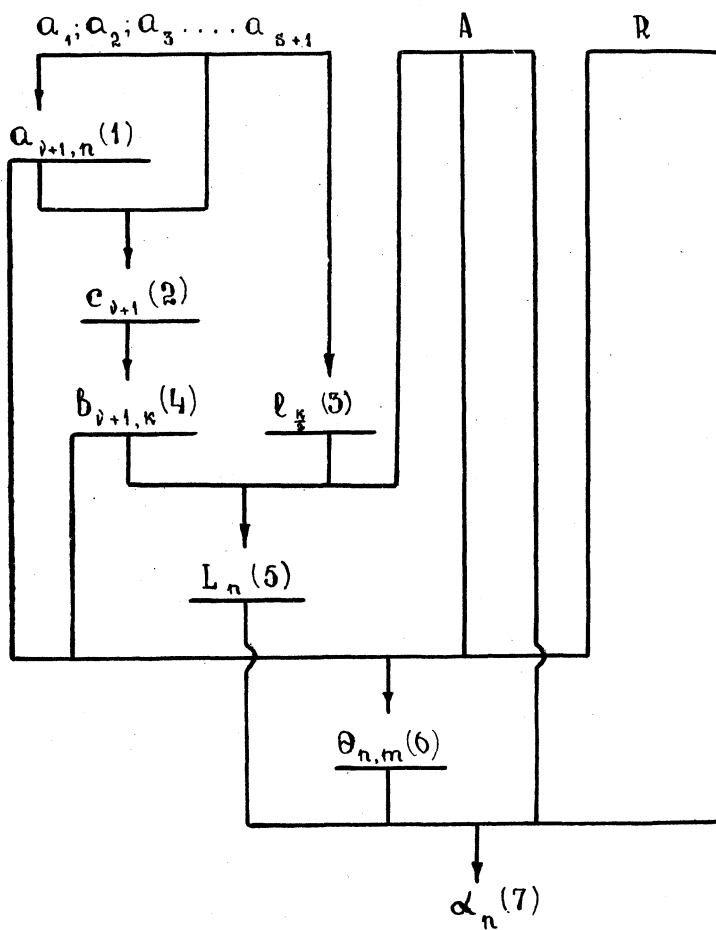
5. Вычисление напряжений на осях симметрии.

Принцип построения схем следующий:

В верхней части схемы, над горизонтальной чертой, приводятся величины, которые являются исходными для вычислений по данной схеме.

Стрелками указана последовательность вычислений. В конце каждой стрелки приведено обозначение вычисляемой величины и (в скобках) номер формулы, по которой она вычисляется. Формулы (пронумерованные в той последовательности, в которой они встречаются при вычислении) и объяснения к ним следуют после каждой вычислительной схемы. После каждой группы формул дано объяснение применяемых в них обозначений и величин.

I. СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
УРАВНЕНИЙ



$$a_{\nu+1,n} = \frac{1}{\nu} \sum_{\kappa=1}^{\nu} [\kappa(n+1)-\nu] a_{\kappa+1} a_{\nu-\kappa+1,n}; \quad (1)$$

$$a_{1,n} = 1;$$

$$\nu = 1, 2, 3, \dots, \overline{M}(2N, 2S);$$

$$n = 2, 4, 6, \dots, 2N;$$

$$\overline{M}(2N, 2S) - \text{большее из чисел } 2N \text{ или } 2S.$$

$$c_{\nu+1} = \sum_{\kappa=0}^S (1-2\kappa) a_{\kappa+1} a_{\nu-\kappa+1, 2\nu-2}, \quad (2)$$

$$a_{2,0} = 0;$$

$$\nu = 1, 2, 3, \dots, N-1.$$

$$l_{\frac{\kappa}{2}} = \sum_{n=0}^{S-\frac{\kappa}{2}} a_{n+1} a_{n+\frac{\kappa}{2}+1}; \quad (3)$$

$$\kappa = 2, 4, 6, \dots, 2S.$$

$$b_{\nu+1,\kappa} = \frac{1}{\nu} \sum_{m=1}^{\nu} [m(1-\kappa)-\nu] c_{m+1} b_{\nu-m+1,\kappa}, \quad (4)$$

$$b_{1,\kappa} = 1;$$

$$\nu = 1, 2, 3, \dots, N-1;$$

$$\kappa = 2, 4, 6, \dots, \overline{M}(2N, 2S).$$

$$L_n = A^2 \sum_{k=2}^{2S} \ell_{\frac{k}{2}}^* \delta_{\frac{n-k}{2}+1, k}; \quad (5)$$

$$n = 2, 4, 6, \dots, 2N;$$

*

- обозначает суммирование через две единицы.

$$\theta_{n,m} = \left(\frac{A}{R}\right)^m \left[\sum_{k=2}^{N(n,m)} \delta_{\frac{n-k}{2}+1, k} a_{\frac{m-k}{2}+1, m} + \sum_{k=2}^n \delta_{\frac{n-k}{2}+1, k} a_{\frac{m+k}{2}+1, m} \right]; \quad (6)$$

$$n = 2, 4, 6, \dots, 2N;$$

$$m = 2, 4, 6, \dots, 2N;$$

$N(n, m)$ - меньшее из чисел m или n .

Решение алгебраической системы уравнений:

$$\alpha_n - \left(\frac{A}{R}\right)^n \sum_{m=2}^{2N} \theta_{n,m} \alpha_m = - \left(\frac{A}{R}\right)^n L_n; \quad (7)$$

$$n = 2, 4, 6, \dots, 2N.$$

Из системы (7) определяются $\alpha_n (n = 2, 4, 6, \dots, 2N)$.

В формулах (I) -(7) приняты следующие обозначения:

a_1, a_2, \dots, a_{s+1} - нормированные коэффициенты

отображающего полинома;

$$\alpha_k = \frac{c_k}{c_1}; \quad A = C_1, \quad \text{где } c_k - \text{коэффициенты отображающего полинома};$$

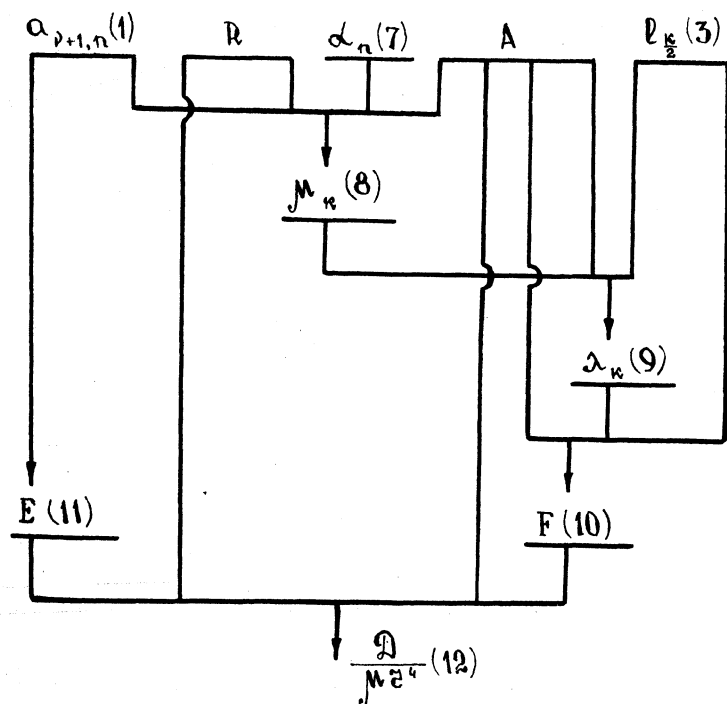
ражающего полинома;

R - радиус окружности, ограничивающей поперечное сечение муфты извне;

$S + I$ - число членов отображающего полинома;

N - число уравнений алгебраической системы (7).

2. Схема вычисления жесткости $\frac{D}{\text{мг}^4}$



$$M_{\kappa} = \sum_{n=\kappa}^{2N} \alpha_n \left(\frac{A}{R}\right)^n \alpha_{\frac{n-\kappa}{2}+1, n}; \quad (8)$$

$$\kappa = 2, 4, 6 \dots 2N.$$

$$\lambda_{\kappa} = 2 M_{\kappa} - A^2 \varrho_{\frac{\kappa}{2}}; \quad (9)$$

$$\kappa = 2, 4, 6 \dots 2S.$$

$$F = \frac{2}{A^2} \sum_{\kappa=2}^{2S} \kappa \lambda_{\kappa} \varrho_{\frac{\kappa}{2}} \quad (10)$$

$$E = \sum_{\kappa=0}^{2S} (\kappa - 1) \alpha_{\kappa+1, 2}^2 \quad (II)$$

Жесткость при кручении

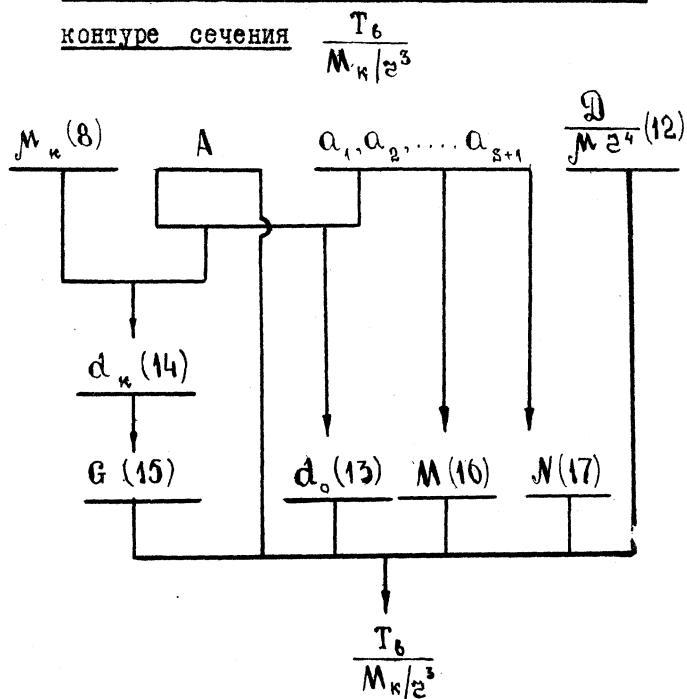
$$\frac{D}{M \varrho^4} = \frac{\pi A^4}{2} \left[\left(\frac{R}{A}\right)^4 + E + F \right]. \quad (I2)$$

В формуле (I2):

M — модуль сдвига;

ϱ — координата точки пересечения внутреннего контура с действительной осью.

3. Схема вычисления напряжений на внутреннем контуре сечения



$$d_o = A^2 \sum_{\kappa=0}^S (1-2\kappa) a_{\kappa+1}^2 \quad (13)$$

$$d_{\kappa} = A^2 \sum_{n=0}^{S-\frac{\kappa}{2}} (1-2n) a_{n+1} a_{n+\frac{\kappa}{2}+1} - \kappa M_{\kappa}; \quad (14)$$

$$\kappa = 2, 4, 6, \dots, \overline{M(2N, 2S)};$$

$$G = \sum_{\kappa=2}^{\infty} \frac{\bar{M}(2N, 2\kappa)}{\kappa} \cdot d_{\kappa} \cos \kappa \theta. \quad (I5)$$

$$M = \sum_{\kappa=0}^s (1-2\kappa) a_{\kappa+1} \cos 2\kappa \theta. \quad (I6)$$

$$N = \sum_{\kappa=0}^s (1-2\kappa) a_{\kappa+1} \sin 2\kappa \theta. \quad (I7)$$

$$\frac{T_b}{M_{\kappa}/v^3} = \frac{d_o + 2G}{\frac{D}{\mu z^4} \cdot A \sqrt{M^2 + N^2}}. \quad (I8)$$

В формулах (I5); (I6); (I7) : θ - произвольный угол, заключенный между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

По формуле (I8) вычисляются напряжения в точках внутреннего контура с координатами :

$$x = A \sum_{\kappa=0}^s a_{\kappa+1} \cos(1-2\kappa)\theta;$$

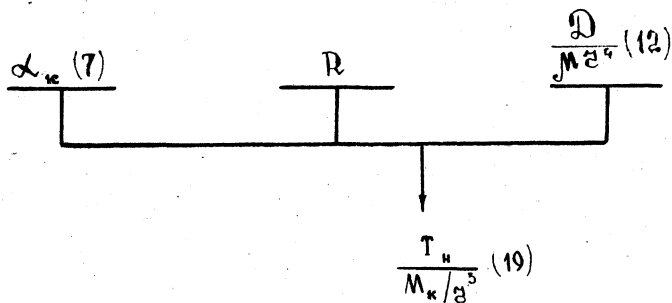
$$y = A \sum_{\kappa=0}^s a_{\kappa+1} \sin(1-2\kappa)\theta,$$

где θ - то же самое, что и в формулах (I5); (I6); (I7);

M_{κ} - крутящий момент.

4. Схема вычисления напряжений на внешнемконтуре сечения

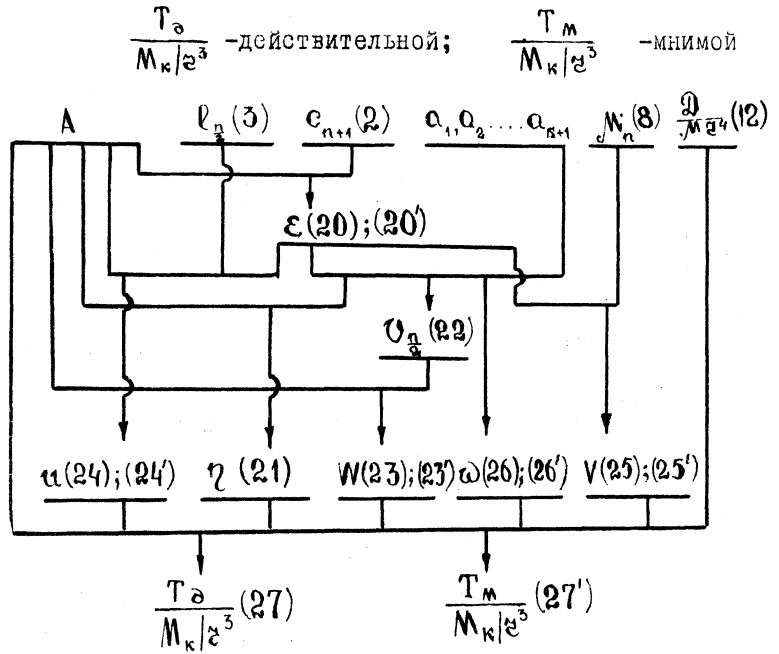
$$\frac{T_n}{M_k / z^3}$$



$$\frac{T_n}{M_k / z^3} = \frac{R^2 - 2 \sum_{k=2}^{2N} k \alpha_k \cos k \varphi}{\frac{D}{M z^4} \cdot R} \quad (19)$$

φ — полярный угол точки на контуре.

5. Схема вычисления напряжений на осях:



$$\varepsilon = \frac{\rho}{A} \sum_{n=0}^{N-1} c_{n+1} \left(\frac{A}{\rho} \right)^{2n}; \quad (20)$$

$$\varepsilon = \frac{\rho}{A} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n c_{n+1} \left(\frac{A}{\rho} \right)^{2n}. \quad (20')$$

$$\eta = A^2 \sum_{\kappa=0}^5 (1-2\kappa) a_{\kappa+1}^2 \frac{1}{\varepsilon^{4\kappa-2}}. \quad (21)$$

$$v_{\frac{n}{2}} = \sum_{\kappa=0}^{s-\frac{n}{2}} a_{\kappa+1} a_{\kappa+\frac{n}{2}+1} [2(1-2\kappa)-n] \frac{1}{\varepsilon^{4\kappa+n-2}}; \quad (22)$$

$$n = 2, 4, 6, \dots, 2s$$

$$W = A^2 \sum_{n=2}^{2s}{}^* v_{\frac{n}{2}}; \quad (23)$$

$$W = A^2 \sum_{n=2}^{2s}{}^* (-1)^{\frac{n}{2}} v_{\frac{n}{2}} \quad (23')$$

$$u = A^2 \sum_{n=2}^{2s}{}^* n l_{\frac{n}{2}} \frac{1}{\varepsilon^n}; \quad (24)$$

$$u = A^2 \sum_{n=2}^{2s}{}^* (-1)^{\frac{n}{2}} n l_{\frac{n}{2}} \frac{1}{\varepsilon^n}. \quad (24')$$

$$V = \sum_{n=2}^{2N}{}^* n \left(\varepsilon^n + \frac{1}{\varepsilon^n} \right) M_n; \quad (25)$$

$$V = \sum_{n=2}^{2N}{}^* (-1)^{\frac{n}{2}} n \left(\varepsilon^n + \frac{1}{\varepsilon^n} \right) M_n. \quad (25')$$

$$\omega = \left| \sum_{\kappa=0}^s (1-2\kappa) a_{\kappa+1} \frac{1}{\varepsilon^{2\kappa-1}} \right|; \quad (26)$$

$$\omega = \left| \sum_{\kappa=0}^s (-1)^{\kappa} (1-2\kappa) a_{\kappa+1} \frac{1}{\varepsilon^{2\kappa-1}} \right|. \quad (26')$$

$$\frac{T}{M_n \varepsilon^3} = \frac{\eta + W + u - V}{\frac{D}{M \varepsilon^4} \cdot A \cdot \omega}. \quad (27), (27')$$

В формулах (20) и (20') ρ - полярный радиус точки соответственно действительной или мнимой оси.

Для вычисления напряжений в точках действительной оси следует использовать первые формулы (без штрихов); при вычислении напряжений в точках мнимой оси вычисления проводятся по формулам, обозначенным штрихами. Формулы (21) и (22) в обоих случаях одни и те же.

В качестве примера рассмотрим задачу кручения тrefовой муфты, применяемой на листопркатном стане "1700" Ждановского металлургического завода им.Ильича. поперечное сечение муфты представлено на рис.1.

Параметры сечения:

$$\frac{h}{e} = 0,779 ; \quad \frac{R}{e} = 1,558 .$$

Жесткость при кручении (приведенная к единичному радиусу - $e = 1$)

$$\frac{D}{\mu e^4} = 7,9105.$$

Касательные напряжения, приведенные к единичному радиусу ($e = 1$) и единичному крутящему моменту ($M_k = 1$), вычислялись в 37 точках на каждом из контуров и в 10 точках на осях симметрии. Результаты вычислений представлены в виде эпюр на рис.2.

Все вычисления проводились на ЭЦВМ "Минск-22".

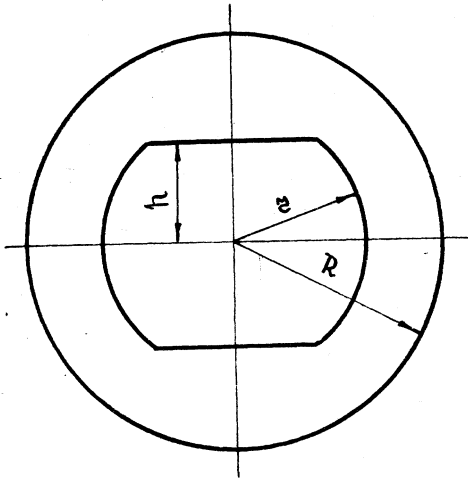


Рис. 1

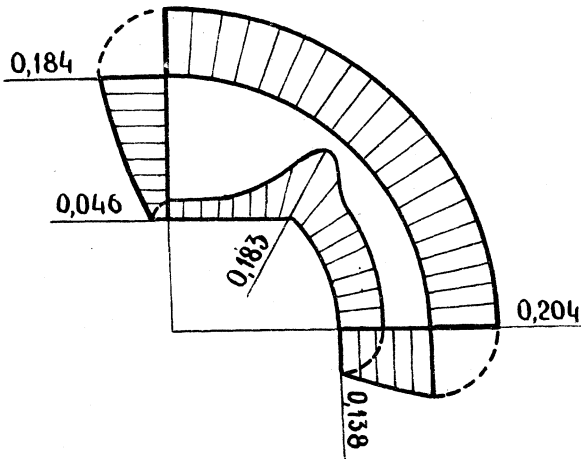


Рис. 2

Л и т е р а т у р а

- 1 . Н.И.МУСХЕЛИШВИЛИ. Некоторые основные задачи математической теории упругости.
М., Изд-во АН СССР, 1954.
2. Д.И. ШЕРМАН. Об одном методе решения некоторых задач теории упругости для двусвязных областей.
ДАН СССР, т. У, № 8, 1947.